ΠΘ Μάθημα 18ο:

5/12/2017

$$\mu = E(X) \stackrel{\text{ορ}}{=} \begin{cases} \sum_x x\, p_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

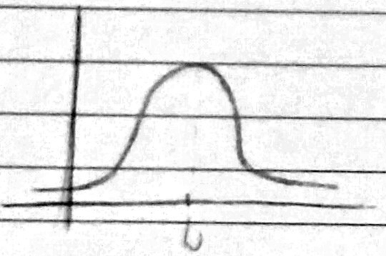
μ, η πιο αντιπροσωπευτική τιμή της κατανομής!

Πρόταση

Έστω συνεχής τ.μ. X με σππ συμμετρική γύρω από $\alpha \in \mathbb{R}$ ($f_X(\alpha+x) = f_X(\alpha-x)$, $\forall x$). Τότε, αν η $E(X)$ υπάρχει και είναι ίση με α.
Δηλ. $E(X) = \alpha$

Παράδειγμα

$N(\mu, \sigma^2)$
$E(X) = \mu$



Μέση ή Αναμενόμενη συνάρτηση Τιμή μιας τ.μ.

Έστω τ.μ. X και g μια πραγματική συνάρτηση. Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της $g(X)$ συμβολίζεται με $E[g(X)]$ και ορίζεται:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x)\, p_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Ιδιότητες Μέσης Τιμής

Πρόταση:

Έστω τ.μ. X και οι πραγματικές συναρτήσεις g, g_1, g_2. Έστω α, β σταθερές. Τότε, αν οι μέσες τιμές υπάρχουν, ισχύουν

(i) $\boxed{E(\alpha) = \alpha}$ ← μας ενδιαφέρει πιο πολύ απ' όλες τις ιδιότητες

(ii) $E[\alpha\, g(X) + b] = \alpha \cdot E[g(X)] + b$

(iii) $E[\alpha\, g_1(X) + b\, g_2(X)] = \alpha \cdot E[g_1(X)] + b \cdot E[g_2(X)]$

(iv) Αν $g(x) \geq 0$ τότε $E[g(x)] \geq 0$

(v) Αν $g_1(x) \geq g_2(x)$ τότε $E[g_1(x)] \geq E[g_2(x)]$

<u>Παράδειγμα</u>

Φοιτητής $\xrightarrow{\text{τύχη}}$ 3 ερωτ. → Καταφατικά → S
ή
→ Αρνητικά → Λ

+1 μονάδα → S , −1 μονάδα → Λ

(α) Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός σωστών απαντήσεων;

(β) Ποιο το αναμενόμενο κέρδος;

<u>Λύση</u>

(α) Έστω X αριθ. των σωστών απαντήσεων (στις 3)

Ζητείται $E(x) = ?$

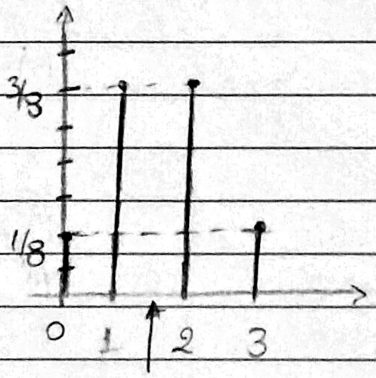
Τιμές X: $x = 0, 1, 2, 3$

$p_x = ?$ $\qquad X \sim B(n=3, p=\frac{1}{2})$

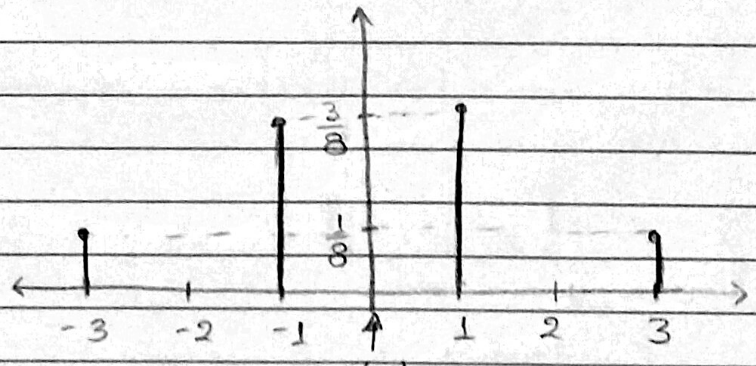
$$p_x(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-x}, \quad x = 0,1,2,3$$

$p_x(0) = \frac{1}{8} = p_x(3)$, $\quad p_x(1) = \frac{3}{8} = p_x(2)$

$$E(x) = \sum_{x=0}^{3} x\, p_x(x) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5$$



$E(x) = 1,5$



$E(Y) = 0$.

(β) Ζητείται $E(Y) = ?$

Τιμές Y:

S: $0 \to -3$, $1 \to -1$, $2 \to 1$, $3 \to 3$

$p_Y(-3) = p_x(0) = 1/8$

$p_Y(-1) = p_x(1) = 3/8$

$p_Y(1) = p_x(2) = 3/8$

$p_Y(3) = p_x(3) = 1/8$

$$E(Y) = \sum_{y=-3,3,-1,1} y\, p_Y(y) = -3 \cdot \frac{1}{8} - 1 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 0$$

Διακύμανση τ.μ.

Ορισμός: Έστω τ.μ. X με αναμενόμενη τιμή μ ή $E(X)$. Η διακύμανση ή διασπορά της τ.μ. X συμβολίζεται με σ^2 ή $Var(X)$ και ορίζεται:

$$\sigma^2 = Var\,X = E\left[(X-\mu)^2\right] = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^2 p_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις:

(α) Η $Var(X)$ $\exists$ αν συγκλίνει το άθροισμα ή το ολοκλήρωμα.

(β) Η $Var(X) \geq 0$. (γι' αυτό χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός σ^2)

(γ) Ερμηνεία της διακύμανσης

Έστω τ.μ. X με τιμές $x_1, \dots, x_n$ και κατανομή την ομοιόμορφη διακριτή, δηλ. με σ.π.π. $p_X(x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 p_X(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\dots+(x_n-\mu)^2}{n}$$

(δ) Θα μπορούσε να οριστεί ως $E(|X-\mu|)$ αλλά η $|\ |$ είναι δύσχρηστη.

(ε) Η $Var(X)$ εκφράζεται σε μονάδες τετραγώνου απ' ότι έχουν παραχθεί οι μετρήσεις. Τυπική απόκλιση: $\sigma = +\sqrt{Var(X)}$.

(στ) Πρόταση: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

απόδ. (στ):

$$Var(X) \overset{\text{ορ}}{=} E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2$$